18　接線・法線

基本問題 & 解法のポイント

29

(1)

交点の x 座標は $1=(\log x)^2$ を満たすから，$\log x=\pm 1$ すなわち $x=e,\ e^{-1}$

よって，交点の座標は $(e,\ 1),\ (e^{-1},\ 1)$

また，$y'=(\log x)'\cdot 2\log x=\dfrac{2\log x}{x}$

よって，

交点 $(e,\ 1)$ における接線の方程式は，$y=\dfrac{2\log e}{e}(x-e)+1$ より，$y=\dfrac{2}{e}x-1$

交点 $(e^{-1},\ 1)$ における接線の方程式は，$y=\dfrac{2\log e^{-1}}{e^{-1}}(x-e^{-1})+1$ より，$y=-2ex+3$

ゆえに，$y=\dfrac{2}{e}x-1$，$y=-2ex+3$　・・・(答)

(2)

接点を $\left(t,\ t-\dfrac{1}{t}\right)$ すなわち $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{t}\right)$ とすると，

$y'=1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2+1}{t^2}$ より，接線のベクトルは $\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$

法線上の点を $(x,\ y)$ とすると，法線は $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{t}\right)$ を通るから，そのベクトルは $\begin{pmatrix} x-t \\ y-\dfrac{t^2-1}{t} \end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-t \\ y-\dfrac{t^2-1}{t} \end{pmatrix}=0$ より，$t^2(x-t)+(t^2+1)\left(y-\dfrac{t^2-1}{t}\right)=0$

すなわち $t^2x+(t^2+1)y-\dfrac{2t^4-1}{t}=0$　・・・①

原点は①を満たすから，$\dfrac{2t^4-1}{t}=0$ より，$2t^4-1=0$　$\therefore t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　・・・②

②を①に代入して整理することにより，求める法線の方程式は，

$x+(\sqrt{2}+1)y=0$ すなわち $y=(1-\sqrt{2})x$　・・・(答)

補足

法線の方程式を傾きから求めると分母が 0 のときとそうでないときに分けることが必要になる場合があるし，計算も煩雑になる。よって，内積から求める方が楽である。

30

$y=e^{\frac{x}{3}}$ より，　$y'=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

$y=a\sqrt{2x-2}+b$ より，　$y'=\frac{a}{\sqrt{2x-2}}$

$x=3$ における y 座標と接線の傾きがそれぞれ等しいから，

$e^{\frac{3}{3}}=a\sqrt{2\cdot 3-2}+b$　　$\therefore 2a+b=e$　　・・・①

$\frac{1}{3}e^{\frac{3}{3}}=\frac{a}{\sqrt{2\cdot 3-2}}$　　$\therefore a=\frac{2}{3}e$　　・・・②

②を①に代入して b を求めると，　$b=-\frac{1}{3}e$

以上より，　$a=\frac{2}{3}e,\ b=-\frac{1}{3}e$　　・・・(答)

A

105

(1)

$y=f(x)=e^x$ とおくと，接線の方程式は $y=f'(a)(x-a)+e^a$ と表せる。

ここで，$f'(x)=e^x$ より，$f'(a)=e^a$ だから，

求める接線の方程式は $y=e^a(x-a)+e^a$ 　すなわち $y=e^a x-ae^a+e^a$

また，法線の方程式は $y=-\dfrac{1}{e^a}(x-a)+e^a$ 　すなわち $y=-\dfrac{1}{e^a}x+\dfrac{a}{e^a}+e^a$

(2)

l_1 の方程式は $y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}+e$ だから，

交点の x 座標は方程式 $-\dfrac{1}{e^a}x+\dfrac{a}{e^a}+e^a=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}+e$ の解である。

この方程式の両辺に e^a を掛けて整理すると，$(e^{a-1}-1)x=(e^{a-1}-1)-e^{a+1}(e^{a-1}-1)+1-a$

ここで，$a\neq 1$ より，$e^{a-1}\neq 1$

よって，$x=1-e^{a+1}-\dfrac{a-1}{e^{a-1}-1}$

(3)

$$\lim_{a\to 1}h(a)=\lim_{a\to 1}\left(1-e^{a+1}-\frac{1}{\frac{e^{a-1}-1}{a-1}}\right)$$

ここで，$a-1=t$ とおくと，

$$\lim_{a\to 1}h(a)=\lim_{t\to 0}\left(1-e^{t+2}-\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}\right)$$

$$=1-e^2-\frac{1}{1}$$

$$=-e^2$$

106

共有点が $(x_1,\ y_1)$ だから，

$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$ すなわち $b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2=a^2b^2$　・・・①

$x_1y_1=k$　・・・②

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x で微分すると，$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\dfrac{dy}{dx}=0$ より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

$xy=k$ を x で微分すると，$\dfrac{dx}{dx}y+x\dfrac{dy}{dx}=0$ より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

条件より $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$ における接線の傾きが等しいから，$-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\dfrac{y_1}{x_1}$

$\therefore b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=0$　・・・③

①，③より，$2b^2x_1{}^2=a^2b^2,\ 2a^2y_1{}^2=a^2b^2$

これと $a>0,\ b>0$ より，$x_1=\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ y_1=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$　・・・(答)

これを②に代入すると，$k=\dfrac{ab}{2}$　・・・(答)

107

(1)

解法 1

$y=f(x)=9x^2+5x+3$，$y=g(x)=-3x^2+x+\dfrac{5}{3}$ とし，

$(s,\ f(s))$ における接線と $(t,\ g(t))$ における接線が一致するとする。

$(s,\ f(s))$ における接線の方程式

$f'(x)=18x+5$ および $y=f'(s)(x-s)+f(s)$ より，$y=(18s+5)x-9s^2+3$　・・・①

$(t,\ g(t))$ における接線の方程式

$g'(x)=-6x+1$ および $y=g'(t)(x-t)+g(t)$ より，$y=(-6t+1)x+3t^2+\dfrac{5}{3}$

より，$(18s+5)x-9s^2+3=(-6t+1)x+3t^2+\dfrac{5}{3}$

これは x についての恒等式だから，$\begin{cases}18s+5=-6t+1\\ -9s^2+3=3t^2+\dfrac{5}{3}\end{cases}$

これを解くことにより，$s=0,\ -\dfrac{1}{3}$ が得られ，これを①に代入することにより，

求める直線の方程式は $y=5x+3,\ y=-x+2$　・・・(答)

解法 2

$y=f(x)=9x^2+5x+3$ とすると，この曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$f'(x)=18x+5$ および $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ より，　$y=(18t+5)x-9t^2+3$　・・・②

これが $y=-3x^2+x+\dfrac{5}{3}$ と接するならば $(18t+5)x-9t^2+3=-3x^2+x+\dfrac{5}{3}$

すなわち $3x^2+2(9t+2)x-9t^2+\dfrac{4}{3}=0$ は重解をもつから，

判別式を D とすると，　$D=0$ より，

$\dfrac{D}{4}=(9t+2)^2-3\left(-9t^2+\dfrac{4}{3}\right)=108t^2+36t=36t(3t+1)=0$　　$\therefore t=0,\ -\dfrac{1}{3}$

これを②に代入することにより，求める直線の方程式は $y=5x+3,\ y=-x+2$　・・・(答)

(2)

$y=5\log(x-a)-2$ 上の点 $(u,\ 5\log(u-a)-2)$ の接線の方程式は，　$y'=\dfrac{5}{x-a}$ より，

$y=\dfrac{5}{u-a}(x-u)+5\log(u-a)-2$ すなわち $y=\dfrac{5}{u-a}x+5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2$

したがって，　$y=\dfrac{5}{u-a}x+5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2$ が $y=5x+3$ または $y=-x+2$ と一致する

ような a の値を求めればよい。

$y=\dfrac{5}{u-a}x+5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2$ が $y=5x+3$ と一致するとき

$\dfrac{5}{u-a}x+5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2=5x+3$ は x の恒等式だから，

$\dfrac{5}{u-a}=5$　　$\therefore u-a=1$　・・・③

$5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2=3$　・・・④

③を④に代入すると，　$5\log 1-\dfrac{5u}{1}-2=3$ より，　$u=-1$

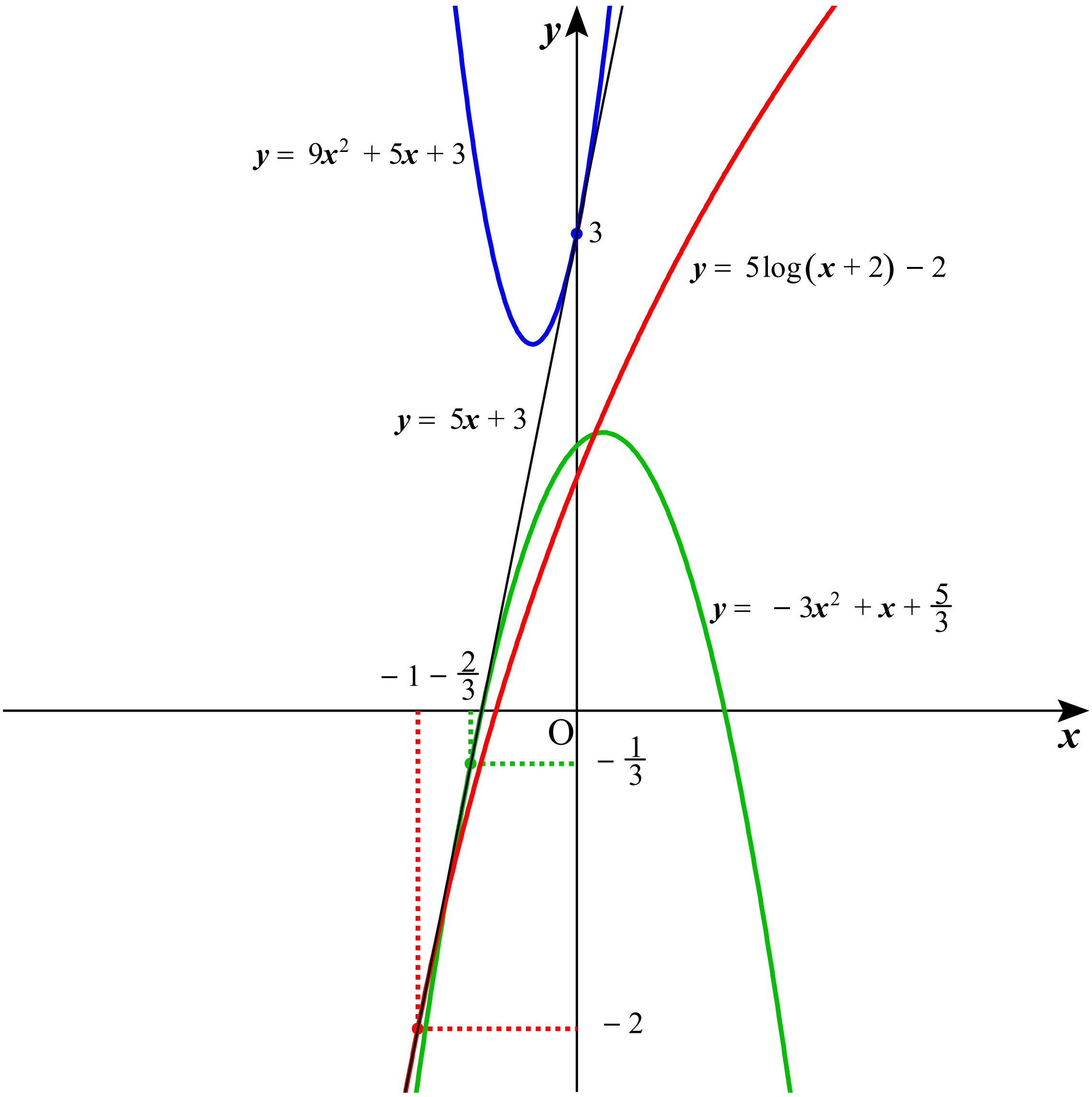
これと③より，　$a=-2$

$y=\dfrac{5}{u-a}x+5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2$ が $y=-x+2$ と一致するとき

$\dfrac{5}{u-a}=-1$　・・・⑤　$5\log(u-a)-\dfrac{5u}{u-a}-2=2$　・・・⑥

⑤より，　$u-a=-5<0$ となり，⑥の $\log(u-a)$ の真数条件を満たさないから不適

以上より，　$a=-2$　・・・(答)


$y = 9x^2 + 5x + 3$
3
$y = 5\log(x+2) - 2$
$y = 5x + 3$
$y = -3x^2 + x + \frac{5}{3}$
$-1-\frac{2}{3}$
O
$-\frac{1}{3}$
-2
x
y

108

(1)

接線の方向ベクトルは$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix} x - t\cos t \\ y - t\sin t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$ （sは実数）

これより，$(x - t\cos t)(\sin t + t\cos t) = (y - t\sin t)(\cos t - t\sin t)$

これを整理することにより，$(\sin t + t\cos t)x - (\cos t - t\sin t)y - t^2 = 0$

補足

$\dfrac{dx}{dt} = \cos t - t\sin t = 0$ の場合，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ より，$\dfrac{dy}{dx}$が定義できないので，ベクトルを使う。

(2)

$(\sin t + t\cos t)x - (\cos t - t\sin t)y - t^2 = 0$ および $t = n\pi$ の n が偶数であることから，

P_n における接線の方程式は $n\pi x - y - (n\pi)^2 = 0$

P_{n+2} における接線の方程式は $(n+2)\pi x - y - \{(n+2)\pi\}^2 = 0$

これを解くことにより，求める交点の座標 $(x,\ y) = \left(2(n+1)\pi,\ n(n+2)\pi^2\right)$

(3)

(2)より，$(n+1)\pi = \dfrac{x}{2}$

よって，

$$
\begin{aligned}
y &= n(n+2)\pi^2 \\
&= n\pi \cdot (n+2)\pi \\
&= \{(n+1)\pi - \pi\}\{(n+1)\pi + \pi\} \\
&= \left(\frac{x}{2} - \pi\right)\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \\
&= \frac{x^2}{4} - \pi^2
\end{aligned}
$$

ゆえに，求める放物線の方程式は $y = \dfrac{x^2}{4} - \pi^2$

例題 15　補足

ベクトルを使うと楽

点 Q$\left(q,\ \dfrac{q^2}{q^2+1}\right)$ $(q \neq 0)$ とおくと，$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix} -q \\ a-\dfrac{q^2}{q^2+1} \end{pmatrix}$

また，$y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ より，点 Q における接線のベクトルは$\begin{pmatrix} (q^2+1)^2 \\ 2q \end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix} -q \\ a-\dfrac{q^2}{q^2+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} (q^2+1)^2 \\ 2q \end{pmatrix}=0$

すなわち$-q(q^2+1)^2+2q\left(a-\dfrac{q^2}{q^2+1}\right)=0 \Leftrightarrow q\left\{-(q^2+1)^2+2\left(a-\dfrac{q^2}{q^2+1}\right)\right\}=0$

$q \neq 0$ より，$-(q^2+1)^2+2\left(a-\dfrac{q^2}{q^2+1}\right)=0$　$\therefore a=\dfrac{(q^2+1)^2}{2}+\dfrac{q^2}{q^2+1}$

B

109

(1)

$r,\ s,\ t$ の 3 文字だから，独立な 3 式を立式すればよい。

円の方程式は$x^2+(y-a)^2=r^2$で点 B を通るから，または AB＝r だから，

$s^2+(t-a)^2=r^2$　・・・①

点 B は双曲線$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の点だから，$s^2-\dfrac{t^2}{b^2}=1$　・・・②

双曲線$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$の両辺を x で微分すると$2x-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$だから，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{y}$

よって，点 B における接線の傾きは$\dfrac{b^2s}{t}$

したがって，点 B における接線のベクトルは$\begin{pmatrix} t \\ b^2s \end{pmatrix}$

この法線ベクトルは$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix} -s \\ a-t \end{pmatrix}$だから，$\begin{pmatrix} t \\ b^2s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -s \\ a-t \end{pmatrix}=0$

すなわち$s\{-t+b^2(a-t)\}=0$

$s>0$ だから，$-t+b^2(a-t)=0$　$\therefore t=\dfrac{ab^2}{b^2+1}$　・・・③

③を②に代入して s^2 を求めると， $s^2=1+\dfrac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}$ ・・・④

$s>0$ だから， $s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}}$

③，④を①に代入して r^2 を求めると，

$$r^2=1+\frac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}+\left(\frac{ab^2}{b^2+1}-a\right)^2$$
$$=\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}$$

$r>0$ だから， $r=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+1}{b^2+1}}$

以上より， $r=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+1}{b^2+1}}$ ， $s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}}$ ， $t=\dfrac{ab^2}{b^2+1}$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{r^2}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}s\\t-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-s\\t-a\end{pmatrix}$$
$$=-s^2+(t-a)^2$$

より， $\dfrac{r^2}{2}=-s^2+(t-a)^2$

よって， $r^2=-2s^2+2(t-a)^2$

これと①より， $s^2+(t-a)^2=-2s^2+2(t-a)^2$

両辺をすると， $3s^2-(t-a)^2=0$

これに③，④を代入し整理すると， $\dfrac{3(b^2+1)^2+a^2(3b^2-1)}{(b^2+1)^2}=0$

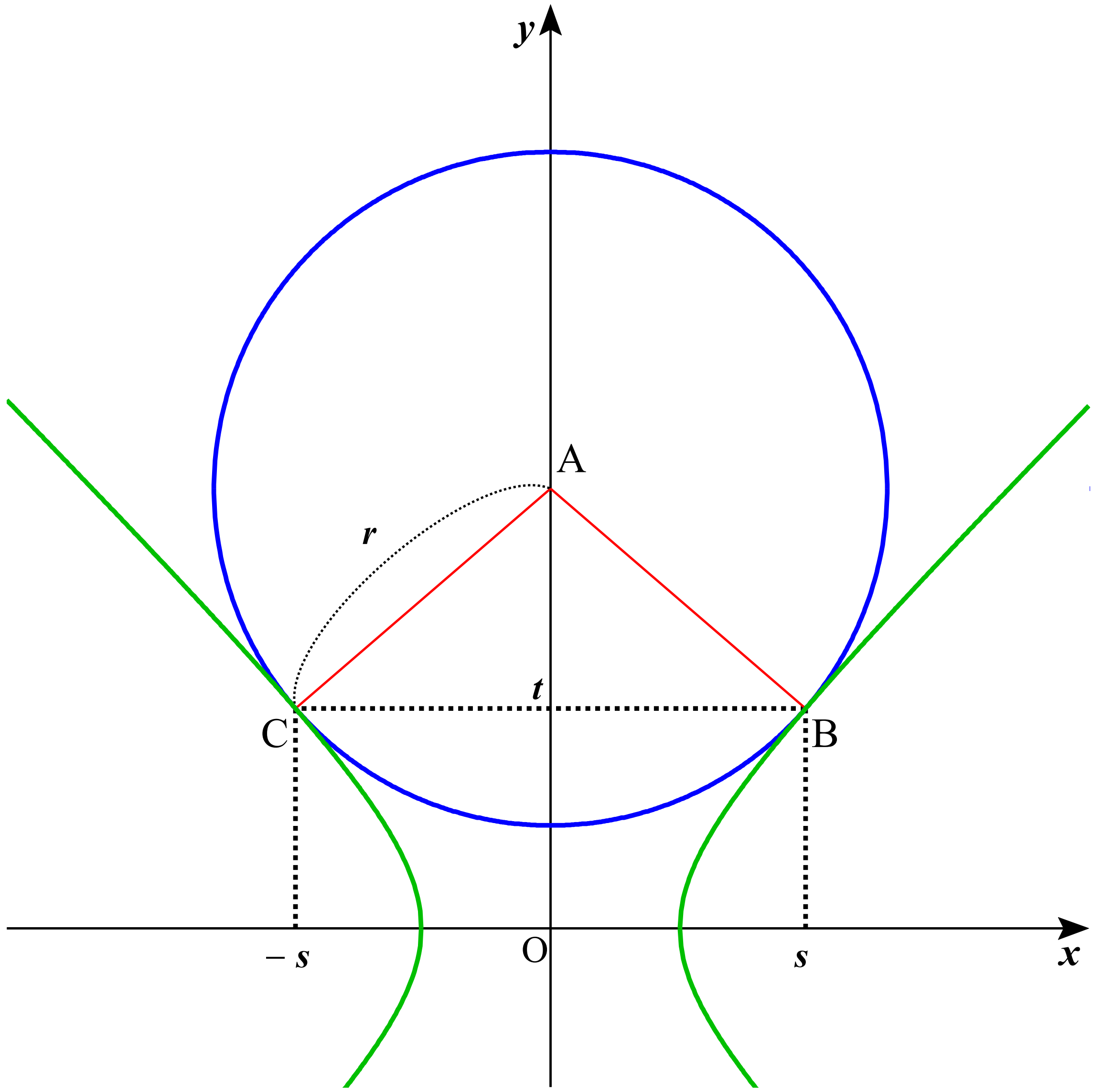
これより， $3(b^2+1)^2+a^2(3b^2-1)=0$

よって，これを満たす a が存在するための b の条件は $3b^2-1<0$

これと $b>0$ より， $0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

逆に，$0<b<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ならば a が存在し，$r=\sqrt{\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}}$ より，r も存在する。

ゆえに，$0<b<\frac{1}{\sqrt{3}}$



110

(1)

l の方程式を $y=mx$，$\mathrm{P}\left(t,\ ae^{-\frac{t^2}{2}}\right)\ (t>0)$ とすると，$mt=ae^{-\frac{t^2}{2}}$ より，$m=\dfrac{ae^{-\frac{t^2}{2}}}{t}$

点 P における C の接線の傾きは，$y'=-axe^{-\frac{x^2}{2}}$ より，$-ate^{-\frac{t^2}{2}}$

l と点 P における C の接線は垂直に交わるから，

$$m\cdot\left(-ate^{-\frac{t^2}{2}}\right)=\frac{ae^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\cdot\left(-ate^{-\frac{t^2}{2}}\right)=-a^2e^{-t^2}=-1$$

よって，$a^2=e^{t^2}$

これと $a>0$ より，$a=e^{\frac{t^2}{2}}$　・・・①

$t>0$ において，$e^{\frac{t^2}{2}}>1$ だから，a のとりうる値の範囲は $a>1$　・・・(答)

①より，$\dfrac{t^2}{2}=\log a$

これと $t>0$ より，$t=\sqrt{2\log a}$

また，①より，$ae^{-\frac{t^2}{2}}=a\cdot a^{-1}=1$

ゆえに，点 P の座標は $\left(\sqrt{2\log a},\ 1\right)$　・・・(答)

(2)

点 P における接線の傾きは

$$\begin{aligned}-ate^{-\frac{t^2}{2}}&=-t\cdot ae^{-\frac{t^2}{2}}\\&=-\sqrt{2\log a}\cdot 1\\&=-\sqrt{2\log a}\end{aligned}$$

よって，その方程式は $y=-\sqrt{2\log a}\left(x-\sqrt{2\log a}\right)+1$ すなわち $y=-\sqrt{2\log a}\,x+2\log a+1$

点 Q はこの接線と x 軸すなわち $y=0$ の交点だから，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2\log a+1}{\sqrt{2\log a}},\ 0\right)$

よって，

$$\triangle \mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\log a+1}{\sqrt{2\log a}}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\log a}+\frac{1}{\sqrt{2\log a}}\right)$$

$\sqrt{2\log a}>0$ だから，相加平均≥相乗平均より，

$$\triangle \mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\log a}+\frac{1}{\sqrt{2\log a}}\right)\geq\sqrt{\sqrt{2\log a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\log a}}}=1$$

等号は $\sqrt{2\log a}=\dfrac{1}{\sqrt{2\log a}}$ すなわち $a=\sqrt{e}$ のとき成り立つ。

ゆえに，△POQ は $a=\sqrt{e}$ のとき最小値 1 をとる。